***Apellidos y nombre*..

TEMAS 9 Y 10. CONTROL. APLICACIONES DERIVADA. REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES. OPC A

1. Calcula los valores de a, b y c para que la función: $f(x)=\begin{cases} x^2+ax & \text{si} \quad -2\le x<1 \\ bx+c & \text{si} \quad 1\le x\le 2 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-2, 2]$.

¿Qué asegura el teorema en este caso?

SOLUCIÓN:

- Continuidad en $[-2, 2]$:
  - Si $x\ne 1$, la función es continua, pues está formada por polinomios, que son funciones continuas.
  - En $x=1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(x^2+ax\right) = 1+a \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left(bx+c\right) = b+c \\ f(1) = b+c \end{cases}$$

  Para que sea continua en $x=1$, ha de ser $1+a=b+c$.
- Derivabilidad en $(-2, 2)$:
  - Si $x\ne 1$, la función es derivable, y su derivada es:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+a & \text{si} \quad -2<x<1 \\ b & \text{si} \quad 1<x<2 \end{cases}$$

  - En $x=1$, han de ser iguales las derivadas laterales:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=2+a \\ f'(1^+)=b \end{array}\right\} \quad 2+a=b$$

- Además, debe ser $f(-2)=f(2)$; es decir:
  $4-2a=2b+c$
- Uniendo las condiciones anteriores, tenemos que:

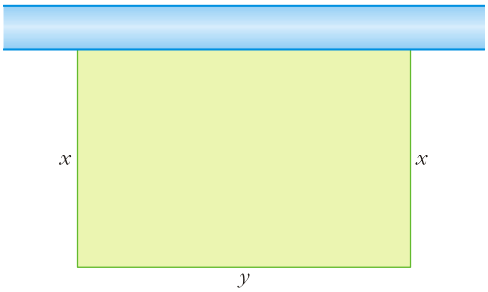
$$\left.\begin{array}{l} 1+a=b+c \\ 2+a=b \\ 4-2a=2b+c \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a=\dfrac{1}{4} \\ b=\dfrac{9}{4} \\ c=-1 \end{array}$$

- En este caso, el teorema de Rolle asegura que existe $c\in(-2, 2)$ tal que $f'(c)=0$.

Apellidos y nombre...

2. Un granjero desea vallar un terreno rectangular de pasto adyacente a un río. El pastizal debe tener 18 hm^2 para producir suficiente forraje para su ganado.

¿Qué dimensiones tendrá el terreno rectangular de forma que utilice la mínima cantidad de valla, si el lado que da al río no necesita ser vallado?



$$\text{Área} = xy = 18 \quad \rightarrow \quad y = \frac{18}{x}$$

Cantidad de valla necesaria:

$$f(x) = 2x + y = 2x + \frac{18}{x}, \; x > 0$$

Buscamos $x > 0$ que haga $f(x)$ mínima:

$$f'(x) = 2 - \frac{18}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 2x^2 - 18 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = 9 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = -3 & \text{(no vale)} \\ x = 3 & \end{cases}$$

Veamos que en $x = 300$ hay un mínimo:

$$f''(x) = \frac{36}{x^3}; \; f''(3) > 0 \quad \rightarrow \quad \text{hay un mínimo}$$

Por tanto, han de ser: x = 300 m, $y = 600$ m.

Apellidos y nombre...

3. Estudia la siguiente función y dibuja su gráfica hallando sus puntos de corte, máximos y mínimos relativos, asíntotas,...: $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

Solución:

- Dominio = $\mathbb{R}-\{-1, 1\}$
- Simetrías:
  $f(-x)=-f(x)$. Es impar: simétrica respecto al origen.
- Asíntotas verticales:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=+\infty\end{array}\right\}\ x=-1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty\end{array}\right\}\ x=1 \text{ es asíntota vertical.}$$

- Asíntota oblicua:

$$y=\frac{x^3}{x^2-1}=x+\frac{x}{x^2-1}\quad\to\quad y=x \text{ es asíntota oblícua.}$$

Posición de la curva respecto a la asíntota:
$f(x)-x<0$ si $x\to-\infty$ (curva por debajo).
$f(x)-x>0$ si $x\to+\infty$ (curva por encima).

- Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2-1)-x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{3x^4-3x^2-2x^4}{(x^2-1)^2}=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$$

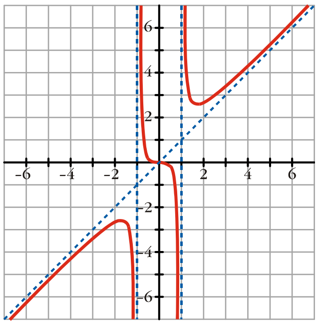
$$f'(x)=0\quad\to\quad x^2(x^2-3)=0\quad\to\quad x=0,\ x=-\sqrt{3},\ x=\sqrt{3}$$

Signo de $f'(x)$:

$f'>0$		$f'<0$		$f'<0$		$f'<0$		$f'<0$		$f'>0$
$\nearrow$	$-\sqrt{3}$	$\searrow$	-1	$\searrow$	0	$\searrow$	1	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -\sqrt{3})\cup(\sqrt{3}, +\infty)$; es decreciente en $(-\sqrt{3}, -1)\cup(-1, 0)\cup(0, 1)\cup(1, \sqrt{3})$. Tiene un máximo en $(-\sqrt{3}; -2{,}6)$; un punto de inflexión en $(0, 0)$ y un mínimo en $(\sqrt{3}; 2{,}6)$.

- Solo corta a los ejes en el punto (0, 0).
- Gráfica:



***Apellidos y nombre*...**

4. Obtén el valor de estos límites:

$$\text{a) } \lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-x-2} \qquad \text{b) } \lim_{x\to -\infty} \left[\sqrt{x^2+x}+x\right] \qquad \text{c) } \lim_{x\to 0} \frac{4-4\cos x}{x^2}$$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)\,(x+3)}{(x-2)\,(x+1)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+3}{x+1} = \dfrac{5}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left[\sqrt{x^2+x}+x\right] = \lim\limits_{x\to +\infty} \left[\sqrt{x^2-x}-x\right] = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2-x}-.x\right)\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)}{\sqrt{x^2-x}+x} =$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-x-x^2}{\sqrt{x^2-x}+x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-x}{\sqrt{x^2-x}+x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-x}{x+x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-x}{2x} = \dfrac{-1}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4-4\cos x}{x^2} = \left(\dfrac{0}{0}\right) \overset{*}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4\,sen\, x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\,sen\, x}{x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) \overset{*}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cos x}{1} = 2$

* Hemos aplicado la regla de L'Hôpital.